RİYAZİYYAT

UOT 51

PARABOLİK TİP TƏNLİKLƏRİN FURYE ÜSULU İLƏ HƏLLİNİN KOMPÜTERDƏ REALİZƏ OLUNMASI

Oqtay Qiyas oğlu ƏZİZOV

Qərbi Kaspi Universiteti,
Riyaziyyat və kompüter elmləri kafedrası, r.ü.f.d.
oqtayazizov@mail.ru

Cəvahirat Nadir qızı ŞİRİNOVA

Qərbi Kaspi Universiteti,
"İnformasiya texnologiyaları və maşınlar" kafedrası
cavahirat93@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə parabolik tip tənliklərin Maple sistemində Furye üsulu ilə kompüterdə realizə olunması göstərilmişdir.

Açar sözlər: Parabolik tip tənlik, başlanğıc şərt, sərhəd şərtləri, Maple sistemi

Məqalədə parabolik tip tənliklərin Maple sistemində kanonik şəklə gətirilməsi və bircins sərhədşərtləri daxilində istilikkeçirmə tənliyinin Furye üsulu ilə həllinin tapılmasının kompüterdə realizə olunması göstərilmişdir. Baxılan misalların konkretliyi realizasiyanın ümumiliyinə heç bir xələl gətirmir və verilənləri əvəz etməklə bu alqoritmdən istifadə etmək olar.

1. Parabolik tiptənliklərin kanonik şəklə gətirilməsi

Məsələ 1. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x + 3u_y + u = 0$ tənliyini kanonik şəklə gətirin.

Həlli. Məsələni Maple analitik hesablamalar sistemində həll edirik. Tənliyi daxil edək.

➢ a:=1,-4,4,-1,3,1,0;

$$a := 1, -4, 4, -1, 3, 1, 0$$

➢ equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+ a[3]*diff(u(x,y),y,y)+ a[4]*diff(u(x,y),x)+ a[5]*diff(u(x,y),y)+ a[6]*diff(u(x,y)+ a[7]=0;

$$equ := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) + 4 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + 3 \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + u(x, y) = 0$$

Yüksək tərtib törəmə əmsallar matrisinin determinantını hesablayırıq.

➢ eq:=ins(equ);

$$eq := (\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)) - 4(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y)) + 4(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)) - (\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)) + 3(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y)) + u(x, y)$$

➢ A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq.diff(u(x,x),x,x)), coeff(eq.diff(u(x,x),x,y))/2,coeff(eq.diff(u(x,x),x,y))/2, coeff(eq.diff(u(x,x),y,y))]);

➢ Delta:=simplifu(linalg[det](A);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := 0$$

Determinant sıfır olduğundan tənlik parabolik tipdir. Xarakteristik tənliyi qurub onu həll edirik.

➢ A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]=0; res1:=solve(A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2],z);

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$res1 := -2, -2$$

➢ subs(y*y(x),resl[1]);resl2:=dsolve(diff(y(x),x)=%,y(x));

$$res2 := y(x) = 2x = C1$$

Xarakteristikaların bir ailəsini aldıq. Dəyişənlərin əvəz edilməsini daxil edirik.

➢ res2:=subs(y(x)=y),res2);

$$res2 := y = 2x + C1$$

➢ itr:={xi=solve(res2._C1).eta=x};

itr:=$itr := \{\xi = y - 2x, \eta = x\}$

Tənliyi kanonik şəklə gətiririk.

➢ tr:=solve(itr.{x,y});

PDEtools[dchange](tr.eq.itr.{eta,xi},simplifu)=0;

$$tr := \{x = \eta, y = \xi + 2\eta\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}u(\eta,\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}u(\eta,\xi) - \frac{\partial}{\partial\eta}u(\eta,\xi) + u(\eta,\xi) = 0$$

2. İstilikkeçirmə tənliyinin dəyişənlərinə ayrılma üsulu ilə həlli

Məsələ 2. $u_t = u_{xx}$ (1)

tənliyinin $\{(x;t): 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, t > 0\}$ oblastında bircins

$u(0,t) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2},t) = 0$ (2)

sərhəd şərtlərini və

$u(x,0) = -\frac{2x}{\pi} + \sin x$ (3)

başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapın.

Həlli. Məsələni Maple sistemində Furye üsulu ilə həlledək.

➢ l:=$\frac{\pi}{2}$;a:=1;

$$l := \frac{\pi}{2}, \qquad a = 1$$

➢ eq:=diff(u(x,t),t)-a^2*diff(u(x,t),x,x)=0;0<x,x<l,t>0;

$$equ := \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0$$

$$0 < x, \qquad x < l, \;\; 0 < t$$

➢ init_c:=u(x,0)=phi(x);

$$init\_c := u(x,0) = \varphi(x)$$

➢ bound_c:=u(0,t)=0,u(l,t)=0

$$\varphi := x \to -\frac{2x}{\pi} + \sin x$$

Axtarılan həlli dəyişənlərinə ayıraq.

➢ res:=pdsolve(eq.HINT='*');

$$res := (u(x,t) = \_F1(x)\_F2(t))$$

$$\&where \left[\{\frac{\partial}{\partial t}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x) = \_c_1\_F1(x)\}\right]$$

➢ res1:=op(1,res);res2:=op(2,res);

$$res1 := u(x,t) = \_F1(x)\_F2(t)$$

$$res2 := \left[\{\frac{\partial}{\partial t}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x) = \_c_1\_F1(x)\}\right]$$

➢ res2[1]:

$$\{\frac{\partial}{\partial t}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x) = \_c_1\_F1(x)\}$$

➢ s1:=op(1,res2[1]);s2:=op(2,res2[1]);

$$s1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x) = \_c_1\_F1(x)$$

$$s2 := \frac{\partial}{\partial t}\_F2(t) = a^2\_c_1\_F2(t)$$

Beləliklə, iki adi diferensial tənlik almış oluruq. Şturm-Liuvill məsələsini quraq. x dəyişəninə görə şərt bircins olduğundan $S1$ tənliyini əlverişli şəkildə yazırıq.

➢ eq1:=lhs(s1)+lambd*_F1(x);

$$eq1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x)\right) + \lambda\_F1(x)$$

Bu tənliyin ümumi həllini tapıb sərhəd şərtlərinə görə bircins tənliklər sistemini qururuq.

➢ assume(lambd>0):pdsolve(eq1._F1(x));

$$\_F1(x) = \_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$$

- ➢ _F1:=unapply(rhs(%),x);
- ➢ e1:=_F1(0)=0; e2:=_F1(l)=0;
- ➢ sist:={e1,e2};

$$\_F1(x) = x \to \_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$$
$$e1 := \_C2 = 0$$
$$e2 := \_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) = 0$$
$$sist := \{\_C1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) = 0, \_C2 = 0\}$$

Bu sistemin determinantını hesablayırıq və sistemi həll edirik.
>A:=linalg[genmatrix](sist:={_C1._C2};

$$A := \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}\,x) & \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Delta:=convert(linalg[det](A),trig);

$$\Delta := \sin(\sqrt{\lambda}\,l)$$

- ➢ _EnvallSolutions:=true:
- ➢ solve(Delta,lambda):

$$\frac{\pi^2\_Z1\sim^2}{l^2}$$

- ➢ indets(%) minus {l};

$$\{\_Z1\sim\}$$

- ➢ subs(%[1]=’k’,%%);
- ➢ ev:=unapply(%,k);

$$ev := k \to \frac{\pi^2 k^2}{l^2}$$

Uyğun məxsusi funksiyalar tapılır:

- ➢ _F1:=’_F1’:assume(k,posint);
- ➢ subs(lambda=ev(k),eq1);

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\_F1(x)\right) + \frac{\pi^2 k\sim^2\_F1(x)}{l^2}$$

- ➢ dsolve({%._F1(0)=0._F1(l)=0}._F1(x));

$$\_F1(x) = \_C1\ \sin\left(\frac{\pi k{\sim} x}{l}\right)$$

Məxsusi funksiyaları normallaşdırırıq:

- rhs(%)/sqrt(int(rhs(%)^2,x=0..l));

$$\frac{\_C1\ \sin(\frac{\pi k{\sim} x}{l})\sqrt{2}}{\sqrt{\_C1^2 l}}$$

- simplify(%,radikal,symbolic);
- ef:=unapply(%,(k,x));

Beləliklə, Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədləri və normallaşdırılmış məxsusi funksiyaları tapılır:

- ef(k):ef(k,x);

$$\frac{\pi^2 k{\sim}^2}{l^2}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi k{\sim} x)}{l})\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

İndi ikinci $S2$diferensial tənliyi həll edək:

- eq2:=lhs(s2)+a^2*ev(k)*_F2(t);

$$eq2 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\_F2(t)\right) + \frac{a^2\pi^2 k{\sim}^2 \_F2(t)}{l^2}$$

- dsolve(eq2,_F2(t));

$$\_F2(t) = \_C1 e^{\left(-\frac{a^2\pi^2 k{\sim}^2 t}{l^2}\right)}$$

Başlanğıc tənliyi aşağıdakı sıra şəklində axtarırıq.

- spr:=Sum(C(k)*exp(-ev(k)*a^2*t)*ef(k,x),k=1..infinity);

$$spr := \sum_{k{\sim}=1}^{\infty} \frac{C(k{\sim}) e^{\left(-\frac{a^2\pi^2 k{\sim}^2 t}{l^2}\right)} \sin(\frac{\pi k{\sim} x}{l})\sqrt{2}}{\sqrt{l}}$$

Başlanğıc şərtlərdən istifadə edib Furye əmsalları hesablanır:

- Ck:=Int((phi(x)*ef(k,x),x=0..1);Ck:=value(Ck);

$$Ck := \int_0^l \frac{(-\frac{2}{\pi}x + \sin x)\sin(\frac{\pi k{\sim}x}{l})\sqrt{2}}{\sqrt{l}}dx$$

$$Ck := (-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{2}}{\pi l k{\sim}(4k{\sim}^2 - 1)}$$

- C:=unapply(Ck,k);

$$C := k{\sim} \to (-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{2}}{\pi l k{\sim}(4k{\sim}^2 - 1)}$$

Nəticədə məsələnin formal həllini tapmış oluruq:

- sol:=spr;

$$sol := \frac{2\sqrt{2}}{\pi l}\sum_{k{\sim}=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{k{\sim}(4k{\sim}^2 - 1)}e^{\left(-\frac{a^2\pi^2k{\sim}^2t}{l^2}\right)}\sin(\frac{\pi k{\sim}x}{l})$$

Beləliklə, (1)-(3) məsələsinin həlli tapılır:

$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{k(4k^2 - 1)}e^{\left(-\frac{a^2\pi^2k^2t}{l^2}\right)}\sin(\frac{\pi kx}{l})$$

l vəa – nın qiymətlərini yerinə yazıb alırıq:

$u(x,t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{k(4k^2-1)}e^{-4k^2t}\sin 2kx.$

Ədəbiyyat:

1. Владимиров В.С. "Уравнения математической физики", М.: Наука, 1988.
2. Сочнева В.А. "Введение в математическую физику: методическое пособие ", Казань: Казанский университет, 2014.
3. Əzizov O.Q. "Riyazifizikanınmetodları. Mühazirələr",Bakı 2010 (Elektronvəsait).